3. Dependencia de los datos

En lo que sigue estudiaremos en que modo la solución depende de los datos del problema. Los datos en cuestión son de dos tipos: los datos iniciales y los datos de la ecuación. los datos iniciales son t_0 el instante en el que "iniciamos" el proceso, x_0 el valor de la solución en el "inicio". Los datos de la ecuación tienen que ver con la función f que define la ecuación. La función f podrá depender de algunos parámetros cuya alteración afecte a la solución. También se puede estudiar el comportamiento de la solución si introducimos un cambio más radical en la ecuación.

Una herramienta clave para este estudio será el lema de Gronwall:

Lema 3.1. Lema de Gronwall generalizado *Sean $\phi \geq 0$ y $\psi \geq 0$ dos funciones continuas de $(\alpha, \omega) \subseteq I\!R$ a valores en $I\!R$, sea $C \geq 0$ una constante y sea $t_0 \in (\alpha, \omega)$. Suponemos que*

$$\phi(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \right| \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega), \tag{32}$$

entonces

$$\phi(t) \leq C e^{\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds \right|} \quad \text{para todo } t \in (\alpha, \omega). \quad \square$$

Demostración. Supongamos $t \geq t_0$, siendo el otro caso, $(t \leq t_0)$, análogo a éste. Por otra parte, supongamos $C > 0$. Definamos

$$\Psi(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds.$$

Entonces

$$\Psi'(t) = \psi(t)\phi(t)$$

por lo que

$$\Psi'(t) = \psi(t)\phi(t) \leq \psi(t) \left(C + \int_{t_0}^{t} \psi(s)\phi(s)ds \right) = \psi(t)(C + \Psi(t)).$$

Luego, dado que $C + \Psi(t) \geq C > 0$ tenemos

$$\frac{\Psi'(t)}{C + \Psi(t)} \leq \psi(t)$$

e integrando entre t_0 y t tenemos

$$\ln(C + \Psi(t)) - \ln(C) \leq \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds$$

de lo que deducimos

$$C + \Psi(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds}$$

y por lo tanto

$$\phi(t) \leq C e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds}.$$

Si $C = 0$ entonces la desigualdad (32) sigue válida si introducimos cualquier $\varepsilon > 0$ en el lugar de C luego

$$\phi(t) \leq \varepsilon e^{\int_{t_0}^{t} \psi(s) ds}$$

para todo $\varepsilon > 0$ por lo que $\phi(t) = 0$.

Un razonamiento análogo para $t \leq t_0$ nos lleva a la conclusión. **Q.E.D.**

Corolario 3.2. (Lema de Gronwall) *Sea $\phi \geq 0$ una función continua de (α, ω) a valores en $\mathbb{R}$. Suponemos que existen dos constantes $K_1 \geq 0$ y $K_2 \geq 0$ tales que ϕ verifica la siguiente desigualdad:*

$$\phi(t) \leq K_1 + K_2 \left| \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds \right|, \quad \textit{para todo } t \in (\alpha, \omega).$$

Entonces

$$\phi(t) \leq K_1 e^{K_2 |t - t_0|}, \quad \textit{para todo } t \in (\alpha, \omega). \quad \square$$

Demostración. Aplicamos el lema 3.1 con $C = K_1$ y $\psi \equiv K_2$. **Q.E.D.**

Proposición 3.3. *Sea $f(t, x)$ una función continua en un conjunto abierto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ y lipschitziana con respecto a x:*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad \textit{para todo } (t, x) \textit{ y todo } (t, y) \textit{ de } \mathcal{D}.$$

Para (t_0, x_0) y (t_0, y_0) en $\mathcal{D}$ sean $x(t)$ e $y(t)$ las soluciones de

$$x'(t) = f(t(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

e

$$y'(t) = f(t(y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

en un intervalo $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ entonces se tiene

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \, e^{\,L\,|t - t_0|} \quad \textit{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a]. \quad \square$$

Demostración. tenemos

$$\left[\begin{array}{ll} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds, & \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a], \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds, & \text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a]; \end{array} \right.$$

y restando

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds,$$

$$\text{para todo } t \in [t_0 - a, t_0 + a].$$

Entonces,

$$\|x(t)-y(t)\| \leq \|x_0-y_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|(f(s,x(s))-f(s,y(s)))\|ds\right|,$$

para todo $t \in [t_0-a, t_0+a]$.

Aplicamos el anterior lema de Gronwall con $\phi(t) = \|x(t)-y(t)\|$, $K_1 = \|x_0-y_0\|$ y $K_2 = 1$.
Q.E.D.

Cuando la variación de los datos afecta a la propia ecuación, el lema de Gronwall todavía nos permite acotar la diferencia dentre las soluciones:

Proposición 3.4. *Sean $f(t,x)$ y $g(t,x)$ dos funciones continuas en un conjunto abierto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ tales que f sea lipschitziana con respecto a x con constante L y $f-g$ es acotada :$|f-g| \leq K$.*

Entonces si $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones de

$$\begin{array}{ll} x'(t) = f(t(x(t)) & \text{para } t \in [a,b] \\ y'(t) = g(t(y(t)) & \text{para } t \in [a,b] \end{array}$$

para algún intervalo $[a,b]$ que contiene t_0, se tiene:

$$\|x(t)-y(t)\| \leq [\|x(t_0)-y(t_0)\| + K(b-a)]\, e^{L|t-t_0|} \quad \text{para todo } t \in [a,b]. \quad \square$$